

# 5. Wigner-Ville-Verteilung

## Inhalt

### 5.1 Definition

- Ambiguitätsfunktion
- Wigner-Ville-Verteilung und Kreuz-Wigner-Ville-Verteilung

### 5.2 Eigenschaften der Wigner-Ville-Verteilung

- Allgemeine Eigenschaften
- Momentanfrequenz und Gruppenlaufzeit
- Produkt und Faltung zweier Signale
- Moyals Formel
- Spektrogramm und Skalogramm
- Rekonstruktion des Signals im Zeitbereich
- (Geglättete) Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung

### 5.3 Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung

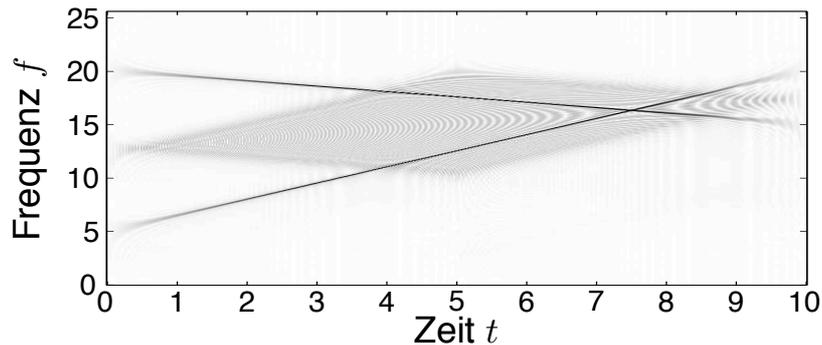
- Wigner-Ville-Verteilung einer Summe von Signalen
- Wigner-Ville-Verteilung des analytischen Signals
- Cohen-Klasse und Affine Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfunktion)
- Reassignment-Methode, signalabhängige Filterung

### 5.4 Diskrete Wigner-Ville-Verteilung

- STFT und Wavelet-Transformation sind **lineare** Integraltransformationen

$$c_i = \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi_i^*(t) dt$$

- Nachteil bei Vergleich mit einer Basisfunktion: Zeit-Frequenz-Unschärfe
- Wigner-Ville-Verteilung: **quadratische** Integraltransformation **ohne Leckeffekt** → höchste Auflösung aller Zeit-Frequenz-Darstellungen
- Nachteil: Kreuzterme



### 5.1 Definition

- Die **Distanz** zweier Signale ist über die Norm ihrer Differenz gegeben:

$$\begin{aligned}
 d^2(y(t), x(t)) &= \|y(t) - x(t)\|^2 \\
 &= \langle y(t), y(t) \rangle - \underbrace{\langle y(t), x(t) \rangle - \langle x(t), y(t) \rangle}_{=\langle x(t), y(t) \rangle^*} + \langle x(t), x(t) \rangle \\
 &= \underbrace{\|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2}_{\text{Signalenergie} \geq 0} - 2 \cdot \underbrace{\text{Re}\{\langle x(t), y(t) \rangle\}}_{\text{Ähnlichkeit}}
 \end{aligned}$$

Innenprodukt: Maß für Signalähnlichkeit

### Beispiel: Ähnlichkeit zeitverschobener Signale

$$y(t) = x(t + \tau)$$

$$\langle x(t + \tau), x(t) \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) \cdot x^*(t) dt = r_{xx}^E(\tau) \rightarrow \text{Autokorrelation}$$

- Alternativ kann die Ähnlichkeit zweier Signale berechnet werden, bei der eines frequenzverschoben ist
- Das Innenprodukt entspricht dann einer Korrelation im Frequenzbereich
- Anwendungsbeispiel: Korrelation von Signalspektren zur Bestimmung der Doppler-Frequenzverschiebung [Messtechnik, Abschn. 6.3.5]

### Beispiel: Ähnlichkeit frequenzverschobener Signale

$$y(t) = x(t) \cdot \exp(j2\pi\vartheta t)$$

$$\begin{aligned}
 \langle x(t) \exp(j2\pi\vartheta t), x(t) \rangle_t &= \langle X(f - \vartheta), X(f) \rangle_f \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - \vartheta) X^*(f) df = \rho_{xx}^E(\vartheta)
 \end{aligned}$$

„Korrelation“ im Frequenzbereich

- Nun: Ähnlichkeitsmaß (d. h. „Korrelation“) für **gleichzeitig zeit- und frequenzverschobene** Signale
- Dafür teilt man die Verschiebungen jeweils symmetrisch in der Zeit ( $\pm \tau/2$ ) und in der Frequenz ( $\pm \vartheta/2$ ) auf:

### Definition: Ambiguitätsfunktion

- Diese Zeit-Frequenz-Autokorrelation nennt man **Ambiguitätsfunktion**:

$$A_{xx}(\tau, \vartheta) = \left\langle x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \exp\left(j2\pi \frac{\vartheta}{2} t\right), x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{\vartheta}{2} t\right) \right\rangle_t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(j2\pi \vartheta t) dt \quad (9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{\vartheta}{2}\right) X^*\left(f + \frac{\vartheta}{2}\right) \exp(j2\pi f \tau) df \quad (10)$$

- Analog zur KKF kann man eine **Kreuz-Ambiguitätsfunktion** definieren

### Eigenschaften der Ambiguitätsfunktion

- Die AKF ist ein Spezialfall der Ambiguitätsfunktion für  $\vartheta = 0$ :

$$r_{xx}^E(\tau) = A_{xx}(\tau, 0)$$

- Entsprechend folgt für  $\tau = 0$  eine „Frequenzkorrelation“:

$$\rho_{xx}^E(\vartheta) = A_{xx}(0, \vartheta)$$

- Die Ambiguitätsfunktion hat ihr Maximum im Ursprung; dieses entspricht der **Signalenergie**:

$$E_x = A_{xx}(0, 0)$$

- Eine **Zeitverschiebung** um  $t_x$  führt zu einer Modulation bzgl.  $\vartheta$ :

$$x'(t) = x(t - t_x) \quad \Rightarrow \quad A_{x'x'}(\tau, \vartheta) = A_{xx}(\tau, \vartheta) \exp(j2\pi \vartheta t_x)$$

- Eine **Frequenzverschiebung** um  $f_x$  führt zu einer Modulation bzgl.  $\tau$ :

$$X'(f) = X(f - f_x) \quad \Rightarrow \quad A_{x'x'}(\tau, \vartheta) = A_{xx}(\tau, \vartheta) \exp(j2\pi f_x \tau)$$

### Definition: Wigner-Ville-Verteilung

- Die **Wigner-Ville-Verteilung** ist die zweidimensionale Fourier-Transformation der Ambiguitätsfunktion bezüglich der Zeit- und der Frequenzverschiebung. Sie entspricht damit einer zeit- und frequenzabhängigen **Energiedichte** (einem zeitvarianten Energiedichtespektrum):

$$W_{xx}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{xx}(\tau, \vartheta) \exp(-j2\pi\vartheta t) d\vartheta \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

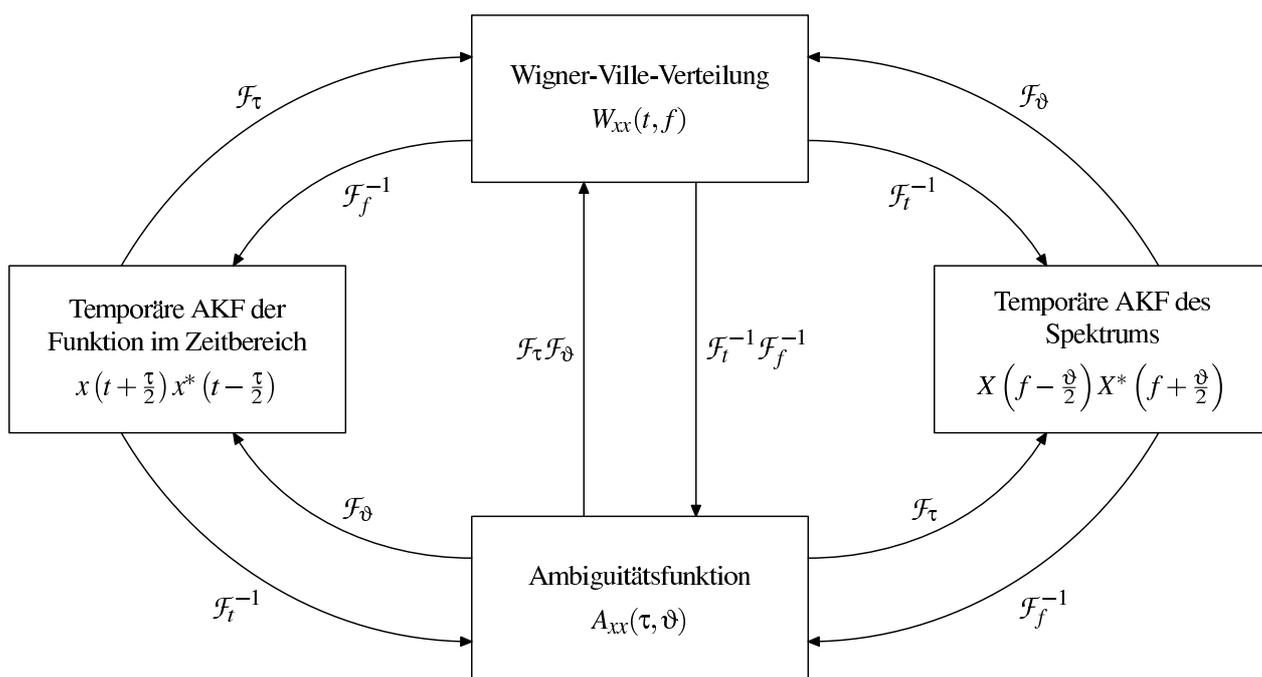
$$= x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

- Nach Folie 7 gilt:

$$A_{xx}(\tau, \vartheta) \xrightarrow{\mathcal{F}_\vartheta} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad \Leftarrow (9)$$

$$A_{xx}(\tau, \vartheta) \xrightarrow{\mathcal{F}_\tau} X\left(f - \frac{\vartheta}{2}\right) X^*\left(f + \frac{\vartheta}{2}\right) \quad \Leftarrow (10)$$

## 5.1.2 Wigner-Ville-Verteilung



### Definition: Kreuz-Wigner-Ville-Verteilung

- In Anlehnung an die Kreuz-Ambiguitätsfunktion  $A_{xy}(\tau, \vartheta)$  kann man eine Kreuz-Wigner-Ville-Verteilung definieren:

$$\begin{aligned}W_{xy}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{\vartheta}{2}\right) Y^*\left(f + \frac{\vartheta}{2}\right) \exp(-j2\pi\vartheta t) d\vartheta\end{aligned}$$

- Die Kreuz-Wigner-Ville-Verteilung ist **nicht** unbedingt reell. Es gilt:

$$W_{yx}(t, f) = W_{xy}^*(t, f)$$

- Die Wigner-Ville-Verteilung  $W_{xx}(t, f)$  ist zwar reell, aber sie kann negative Werte annehmen (Abschn. 5.2.1)

## 5.2 Eigenschaften der Wigner-Ville-Verteilung

### 5.2.1 Allgemeine Eigenschaften

- **Frequenz-Randbedingung.** Folgt aus der zeitlichen Integration der WVV:

$$\begin{aligned}
 S_{xx}^E(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau dt \quad \left| t' = t - \frac{\tau}{2} \right. \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t' + \tau) x^*(t') dt' \right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}^E(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = |X(f)|^2
 \end{aligned}$$

Die Integration ergibt das **Energiedichtespektrum** über der Frequenz

### 5.2.1 Allgemeine Eigenschaften

- **Zeit-Randbedingung.** Nun wird die WVV über der Frequenz integriert:

$$\begin{aligned}
 s_{xx}^E(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{\vartheta}{2}\right) X^*\left(f + \frac{\vartheta}{2}\right) \exp(-j2\pi\vartheta t) d\vartheta df \quad \left| f' = f + \frac{\vartheta}{2} \right. \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} X(f' - \vartheta) X^*(f') df' \right) \exp(-j2\pi\vartheta t) d\vartheta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xx}^E(\vartheta) \exp(-j2\pi\vartheta t) d\vartheta = |x(t)|^2
 \end{aligned}$$

Die Integration ergibt die **Energiedichte über der Zeit**

- **Integration** der WVV über Zeit und Frequenz:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) dt df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}^E(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xx}^E(t) dt$$

Die Integration über der Zeit und der Frequenz ergibt die **Signalenergie**

- **Zeitliche Verschiebungsinvarianz:**

$$x'(t) = x(t - t_x)$$

$$\begin{aligned} W_{x'x'}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t - t_x + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - t_x - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= W_{xx}(t - t_x, f) \end{aligned}$$

Die WVV eines zeitverschobenen Signals ist die zeitverschobene WVV

- **Frequenzmäßige Verschiebungsinvarianz:**

$$x'(t) = x(t) \exp(j2\pi f_x t)$$

$$\begin{aligned} W_{x'x'}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \exp\left(j2\pi f_x \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \\ &\quad \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp\left(-j2\pi f_x \left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi(f - f_x)\tau) d\tau \\ &= W_{xx}(t, f - f_x) \end{aligned}$$

Die WVV eines modulierten Signals ist die frequenzverschobene WVV

### ■ Gleichzeitige Zeit- und Frequenzverschiebung:

$$x'(t) = x(t - t_x) \cdot \exp(j2\pi f_x t)$$

$$\begin{aligned} W_{x'x'}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t - t_x + \frac{\tau}{2}\right) \exp\left(j2\pi f_x \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \\ &\quad \cdot x^*\left(t - t_x - \frac{\tau}{2}\right) \exp\left(-j2\pi f_x \left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t - t_x + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - t_x - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi(f - f_x)\tau) d\tau \\ &= W_{xx}(t - t_x, f - f_x) \end{aligned}$$

Die WVV eines zeitverschobenen und frequenzmodulierten Signals ist die zeitverschobene und frequenzverschobene WVV

## 5.2.1 Allgemeine Eigenschaften

### ■ Die Auto-Wigner-Ville-Verteilung ist **reell**:

$$\begin{aligned} W_{xx}^*(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(j2\pi f \tau) d\tau \quad \left| \tau' = -\tau \right. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t - \frac{\tau'}{2}\right) x\left(t + \frac{\tau'}{2}\right) \exp(-j2\pi f \tau') d\tau' = W_{xx}(t, f) \end{aligned}$$

Die Verteilung kann auch **negative Werte** annehmen.

### ■ **Reelle symmetrische Signale** (insbesondere Fensterfunktionen) besitzen eine sowohl in Zeit- als auch in Frequenzrichtung symmetrische Wigner-Ville-Verteilung [KSW08]:

$$\gamma(t) = \gamma(-t) \text{ reell}$$

$$\Leftrightarrow W_{\gamma\gamma}(t, f) = W_{\gamma\gamma}(-t, f) = W_{\gamma\gamma}(t, -f) = W_{\gamma\gamma}(-t, -f)$$

## 5.2.1 Allgemeine Eigenschaften

- Wigner-Ville-Verteilung des **zeitlich skalierten** Signals ( $a > 1$ ):

$$x_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} x\left(\frac{t}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad W_{x_a x_a}(t, f) = W_{xx}\left(\frac{t}{a}, af\right)$$

WVV wird in Zeitrichtung gestreckt und in Frequenzrichtung gestaucht

- Das  $n$ -te **Zeitmoment** der WVV  $W_{xx}(t, f)$  über Zeit und Frequenz ist gleich dem  $n$ -ten Zeitmoment der Energiedichte  $|x(t)|^2$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot W_{xx}(t, f) dt df = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) df}_{|x(t)|^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^n |x(t)|^2 dt$$

- Das  $n$ -te **Frequenzmoment** der WVV  $W_{xx}(t, f)$  über Zeit und Frequenz ist gleich dem  $n$ -ten Frequenzmoment der Energiedichte  $|X(f)|^2$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^n \cdot W_{xx}(t, f) dt df = \int_{-\infty}^{\infty} f^n |X(f)|^2 df$$

## 5.2.2 Momentanfrequenz und Gruppenlaufzeit

- Energiesignal wird in Betrag und Phase zerlegt:  $x(t) = A(t) \exp(j\varphi(t))$

### Satz: Momentanfrequenz

- Die Momentanfrequenz  $f_x(t)$ , d. h. die Ableitung der Phase  $\varphi(t)$  nach der Zeit:

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\varphi}(t),$$

lässt sich als erstes Moment der normierten Wigner-Ville-Verteilung über der Frequenz berechnen:

$$f_x(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f \cdot W_{xx}(t, f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) df}$$

Mittlere Frequenz (Kap. 1):

$$f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df$$

- Die WVV hat damit die gleiche Eigenschaft bzgl. der Momentanfrequenz wie das Energiedichtespektrum ( $\leftarrow$  F-Trafo) bzgl. der mittleren Frequenz
- Weder Spektrogramm noch Skalogramm haben diese Eigenschaft

### Satz: Gruppenlaufzeit

- Entsprechend kann die Gruppenlaufzeit als erstes Moment der normierten Wigner-Ville-Verteilung über der Zeit berechnet werden:

$$t_x(f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot W_{xx}(t, f) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) dt}$$

- Eine positive Gruppenlaufzeit entspricht einer Signalverzögerung
- Die WVV hat die gleiche Eigenschaft bezüglich der Gruppenlaufzeit wie die zeitliche Energiedichte bezüglich der mittleren Zeit:

$$t_x = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt$$

## 5.2.3 Produkt und Faltung zweier Signale

- **Produkt im Zeitbereich** → Faltung der WVV bzgl. der Frequenz [KSW08]

$$y(t) = x(t) \cdot h(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad W_{yy}(t, f) = W_{xx}(t, f) *_{f'} W_{hh}(t, f)$$

- **Faltung im Zeitbereich** → Faltung der WVV bzgl. der Zeit [KSW08]

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad W_{yy}(t, f) = W_{xx}(t, f) *_{t'} W_{hh}(t, f)$$

### Beispiel: Multiplikation und Faltung des Signals $x(t)$ mit einem harmonischen Chirp-Signal

$$y(t) = x(t) \cdot \exp\left(j2\pi \frac{1}{2} \frac{t^2}{T^2}\right)$$

$$y(t) = x(t) * \exp\left(j2\pi \frac{1}{2} \frac{t^2}{T^2}\right)$$

$$W_{yy}(t, f) = W_{xx}\left(t, f - \frac{t}{T^2}\right)$$

$$W_{yy}(t, f) = W_{xx}\left(t - f \cdot T^2, f\right)$$

Momentanfrequenz

Gruppenlaufzeit

### Moyals Formel

- Man kann zeigen, dass das Produkt zweier Innenprodukte der Signale  $x_1(t), y_1(t)$  und  $x_2(t), y_2(t)$  bzgl. der Zeit gleich dem Innenprodukt der Kreuz-Wigner-Ville-Verteilungen ist [KSW08]:

$$\begin{aligned} \langle x_1(t), y_1(t) \rangle_t \langle x_2(t), y_2(t) \rangle_t^* &= \langle W_{x_1 x_2}(t, f), W_{y_1 y_2}(t, f) \rangle_{t, f} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x_1 x_2}(t, f) W_{y_1 y_2}^*(t, f) dt df \end{aligned}$$

- Für  $x_1(t) = x_2(t)$  und  $y_1(t) = y_2(t)$  ergibt sich **Moyals Formel** als wichtiger Sonderfall:

Das Betragsquadrat des Innenprodukts zweier Signale ist gleich dem Innenprodukt ihrer Wigner-Ville-Verteilungen:

$$|\langle x(t), y(t) \rangle_t|^2 = \langle W_{xx}(t, f), W_{yy}(t, f) \rangle_{t, f} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) W_{yy}(t, f) dt df$$

## 5.2.5 Spektrogramm und Skalogramm

### Zusammenhang zwischen Spektrogramm (STFT) und WVV

- STFT als Innenprodukt mit zeit- und frequenzverschobenem Fenster:

$$F_x^\gamma(t, f) = \langle x(t'), \gamma(t' - t) \exp(j2\pi f t') \rangle_{t'}$$

- Das **Spektrogramm** ist das Betragsquadrat der STFT:

$$S_x^\gamma(t, f) = |F_x^\gamma(t, f)|^2 = |\langle x(t'), \gamma(t' - t) \exp(j2\pi f t') \rangle_{t'}|^2$$

- Nach Moyals Formel

$$|\langle x(t), y(t) \rangle_t|^2 = \langle W_{xx}(t, f), W_{yy}(t, f) \rangle_{t, f}$$

entspricht das Spektrogramm dem Innenprodukt der WVVen:

$$\begin{aligned} S_x^\gamma(t, f) &= \langle W_{xx}(t', f'), W_{\gamma\gamma}(t' - t, f' - f) \rangle_{t', f'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t', f') W_{\gamma\gamma}(t' - t, f' - f) dt' df' \end{aligned}$$

- Bei **reellen, symmetrischen Fenstern**  $\gamma(t)$  ist die WVV ebenfalls in Zeit- und Frequenzrichtung symmetrisch (Folie 18). Damit ist das Spektrogramm (Korrelationsintegral) auch als **Faltung** zweier WVVen darstellbar:

$$\begin{aligned}
 S_x^\gamma(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t', f') \cdot W_{\gamma\gamma}(t - t', f - f') dt' df' \\
 &= W_{xx}(t, f) \underset{t', f'}{*} W_{\gamma\gamma}(t, f)
 \end{aligned}$$

### Diskussion

- Faltung der WVV des Signals mit der WVV des Fensters bewirkt eine Art **Leckeffekt** (Verschmierung)
- Deswegen hat das **Spektrogramm** grundsätzlich eine **schlechtere Auflösung** als die entsprechende WVV des Signals

### Zusammenhang zwischen Skalogramm (Wavelet-Trafo) und WVV

- Wavelet-Transformation als Innenprodukt mit transformiertem Wavelet:

$$W_x^\psi(a, b) = \left\langle x(t), \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle_t$$

- Das **Skalogramm** ist das Betragsquadrat der Wavelet-Transformierten. Mit Moyals Formel lässt es sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 |W_x^\psi(a, b)|^2 &= \left| \left\langle x(t), \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle_t \right|^2 = \left\langle W_{xx}(t, f), W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, af\right) \right\rangle_{t, f} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, af\right) dt df
 \end{aligned}$$

- Auch das Skalogramm hat eine schlechtere Auflösung als die WVV

## 5.2.6 Rekonstruktion des Zeitsignals

- Zwei Signale, die sich nur um eine **konstante Phasenverschiebung** unterscheiden, besitzen identische Wigner-Ville-Verteilungen:

$$x'(t) = \exp(j\varphi) \cdot x(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{x'x'}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\varphi) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \\ &\quad \cdot \exp(-j\varphi) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = W_{xx}(t, f) \end{aligned}$$

Die Phaseninformation geht verloren → **ein Signal kann aus seiner WVV nicht vollständig rekonstruiert werden**

- **Rekonstruktionsansatz:** Inverse Fourier-Transformation der WVV bzgl.  $f$  liefert die temporäre Autokorrelationsfunktion (vgl. Folie 10):

$$x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) \exp(j2\pi f\tau) df$$

## 5.2.6 Rekonstruktion des Zeitsignals

$$x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) \exp(j2\pi f\tau) df$$

- Für  $t = \tau/2$  ergibt sich daraus:

$$\tilde{x}(\tau) := x(\tau) x^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}\left(\frac{\tau}{2}, f\right) \exp(j2\pi f\tau) df$$

- Das Signal stimmt bis auf einen unbekanntem Faktor  $x^*(0)$  mit  $x(t)$  überein. Für  $\tau = 0$  folgt daraus:

$$|x(0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(0, f) df$$

- Division durch  $|x(0)|$  liefert die **bestmögliche Rekonstruktion:**

$$\hat{x}(t) = \frac{\tilde{x}(t)}{|x(0)|} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}\left(\frac{t}{2}, f\right) \exp(j2\pi ft) df}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(0, f) df}}$$

- Analog kann eine Rekonstruktion des **Fourier-Spektrums** vorgenommen werden. Nach Folie 10 gilt:

$$X\left(f - \frac{\vartheta}{2}\right) X^*\left(f + \frac{\vartheta}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) \exp(j2\pi\vartheta t) dt$$

$$f = \frac{\vartheta}{2} \Rightarrow \tilde{X}^*(\vartheta) := X(0) X^*(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}\left(t, \frac{\vartheta}{2}\right) \exp(j2\pi\vartheta t) dt$$

- Für  $\vartheta = 0$  folgt daraus:  $|X(0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, 0) dt$

- **Bestmögliche Rekonstruktion:**

$$\hat{X}(f) = \frac{\tilde{X}(f)}{|X(0)|} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}\left(t, \frac{f}{2}\right) \exp(-j2\pi ft) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, 0) dt}}$$

### Definition: Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung (PW)

- Entspricht der Fourier-Transformation einer **gefensterten** temporären Autokorrelationsfunktion:

$$W_{xx}^{(PW)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

- Sonderfall  $h(\tau) = r_T(\tau)$  (Fensterung mit Rechteckfenster)  $\rightarrow$  Begrenzung des Integrationsintervalls:

$$W_{xx}^{(PW)}(t, f) = \int_{-T/2}^{T/2} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

- Durch Fensterung in zeitlicher Richtung entsteht ein **Leckeffekt** (Faltung, Glättung) in Frequenzrichtung (vgl. Abschnitt 5.3.3):

$$W_{xx}^{(PW)}(t, f) = W_{xx}(t, f) *_f H(f)$$

### Definition: Geglättete Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung (SPW)

- Entsteht aus der Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung durch zeitliche Faltung mit einem Glättungsfilter  $g(t)$ :

$$W_{xx}^{(\text{SPW})}(t, f) = W_{xx}^{(\text{PW})}(t, f) \underset{t'}{*} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t') W_{xx}^{(\text{PW})}(t', f) dt'$$

- Durch die Glättung werden sogenannte **Kreuzterme** unterdrückt (vgl. Abschnitt 5.3.1)
- Allerdings entsteht ein **zusätzlicher „Leckeffekt“** (Verschmierung) **in Zeitrichtung**
- Nähere Betrachtung der Geglätteten Pseudo-WVV in Abschnitt 5.3.3

## 5.3 Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung

### 5.3.1 Wigner-Ville-Verteilung einer Summe v. Signalen

- **Vorteil** der WVV gegenüber STFT und Wavelets: höhere Zeit-Frequenz-Auflösung als nach der Unschärferelation möglich
- **Nachteil:** keine lineare, sondern quadrat. Transformation → **Kreuzterme**
- Superposition von Signalen führt zur Summe ihrer Kreuz-WVVen:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) \quad \rightarrow \quad W_{xx}(t, f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j^* W_{x_i x_j}(t, f)$$

**Beispiel: Überlagerung zweier Signale**  $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$$\begin{aligned} W_{xx}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [c_1 x_1(t + \frac{\tau}{2}) + c_2 x_2(t + \frac{\tau}{2})] [c_1^* x_1^*(t - \frac{\tau}{2}) + c_2^* x_2^*(t - \frac{\tau}{2})] \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= |c_1|^2 W_{x_1 x_1}(t, f) + |c_2|^2 W_{x_2 x_2}(t, f) + 2 \operatorname{Re}\{c_1 c_2^* W_{x_1 x_2}(t, f)\} \quad \text{Kreuzterme} \end{aligned}$$

### 5.3.1 Wigner-Ville-Verteilung einer Summe v. Signalen

**Beispiel: Wigner-Ville-Verteilung der Summe zweier komplexer harmonischer Schwingungen**

- Es sei:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\text{mit } x_1(t) = A_1 \cdot \exp(j2\pi f_1 t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = A_2 \cdot \exp(j2\pi f_2 t)$$

- Die Auto-WVV-Terme sind einfach zu berechnen. Insgesamt erhält man für die WVV (b. w.):

$$W_{xx}(t, f) = A_1^2 \cdot \delta(f - f_1) + A_2^2 \cdot \delta(f - f_2) + 2A_1 A_2 \cos(2\pi \Delta f t) \cdot \delta(f - f_\mu)$$

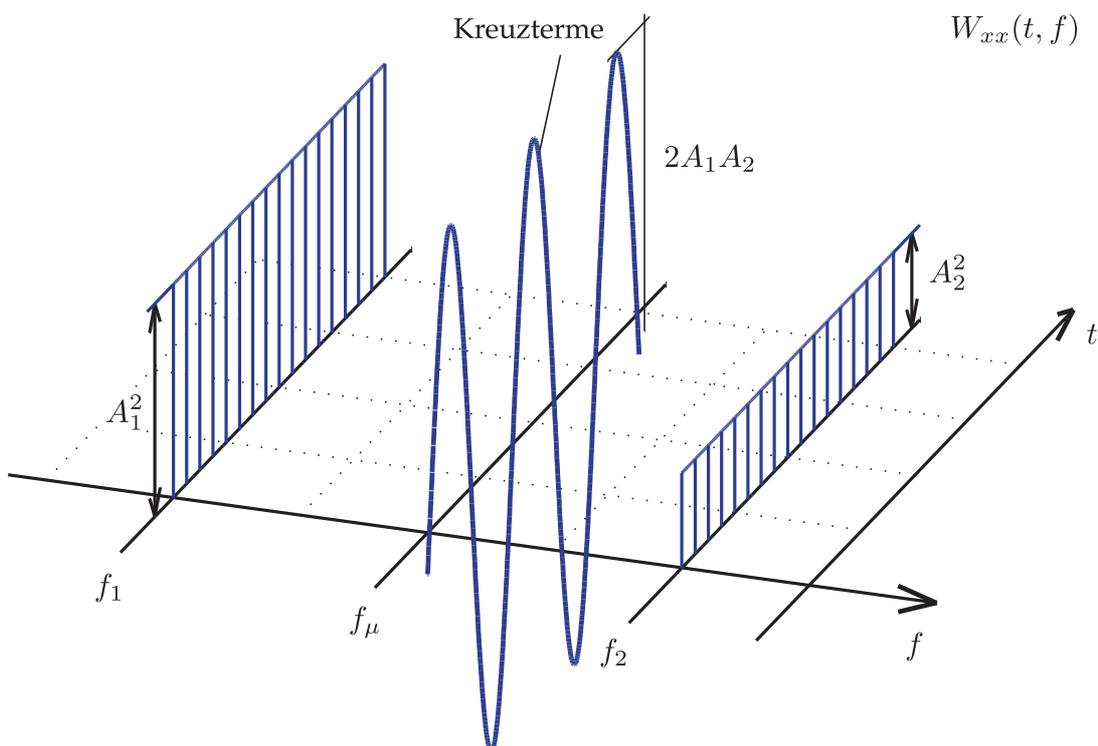
$$\text{Dabei sind: } \begin{cases} \Delta f = f_1 - f_2 & \text{Differenzfrequenz} \\ f_\mu = (f_1 + f_2) / 2 & \text{mittlere Frequenz} \end{cases}$$

- Da in diesem Beispiel nur die Kreuzterme oszillieren, könnten sie mit einem zeitlichen Tiefpassfilter unterdrückt werden (vgl. SPW, Abs. 5.2.8)

■ Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
 W_{xx}(t, f) &= \int A_1^2 \exp\left(j2\pi f_1 \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \exp\left(-j2\pi f_1 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\
 &+ \int A_2^2 \exp\left(j2\pi f_2 \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \exp\left(-j2\pi f_2 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\
 &+ \int A_1 A_2 \left[ \exp\left(j2\pi f_1 \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \exp\left(-j2\pi f_2 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + \exp\left(j2\pi f_2 \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \exp\left(-j2\pi f_1 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) \right] \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\
 &= \int \left[ A_1^2 \exp(j2\pi f_1 \tau) + A_2^2 \exp(j2\pi f_2 \tau) \right] \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\
 &\quad + \int A_1 A_2 \underbrace{\left[ \exp(j2\pi \underbrace{(f_1 - f_2)}_{\Delta f} t) + \exp(-j2\pi \underbrace{(f_1 - f_2)}_{\Delta f} t) \right]}_{= 2 \cos(2\pi \Delta f t)} \\
 &\quad \cdot \exp(j2\pi \underbrace{(f_1 + f_2)}_{= 2f_\mu} \frac{\tau}{2}) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\
 &= A_1^2 \cdot \delta(f - f_1) + A_2^2 \cdot \delta(f - f_2) + 2A_1 A_2 \cos(2\pi \Delta f t) \cdot \delta(f - f_\mu)
 \end{aligned}$$

Wigner-Ville-Verteilung der Summe zweier Schwingungen



- Die Ambiguitätsfunktion der Summe zweier Signale weist ebenfalls Kreuzterme auf

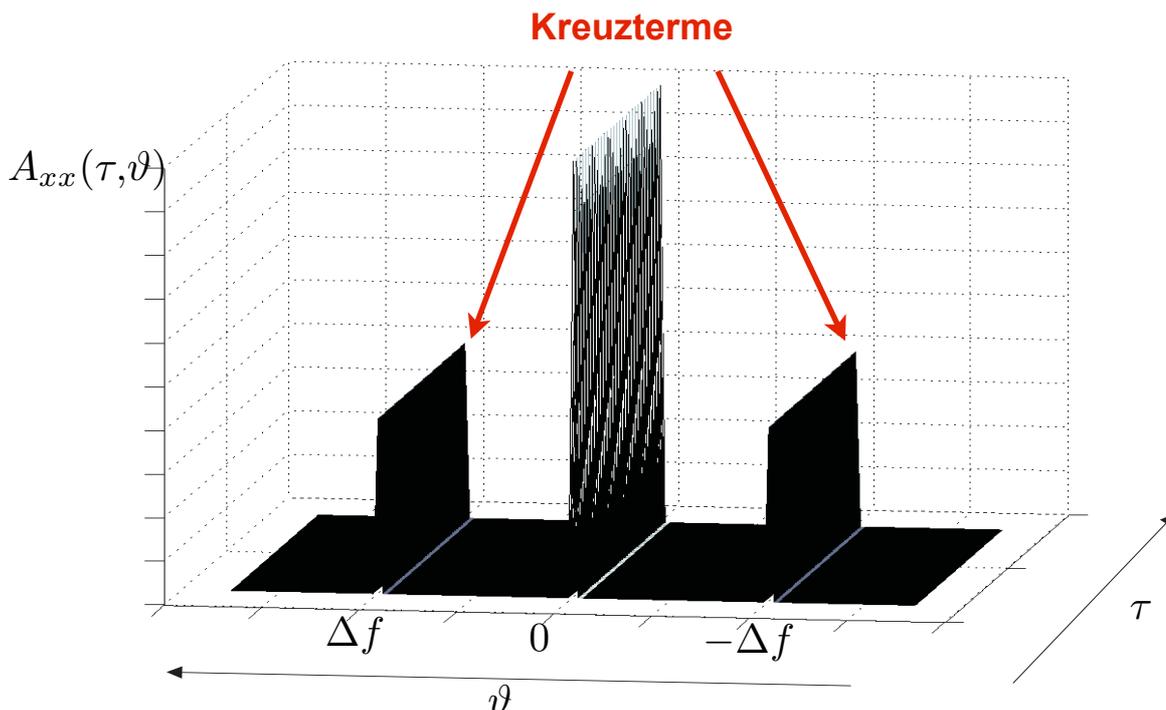
#### Beispiel: Ambiguitätsfunktion der Summe zweier komplexer harmonischer Schwingungen

- Es sei:  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  mit  $x_i(t) = A_i \cdot \exp(j2\pi f_i t)$

$$W_{xx}(t, f) = A_1^2 \cdot \delta(f - f_1) + A_2^2 \cdot \delta(f - f_2) + 2A_1 A_2 \cos(2\pi \Delta f t) \cdot \delta(f - f_\mu)$$

- Die Ambiguitätsfunktion erhält man durch zweifache inverse Fourier-Transformation von  $W_{xx}(t, f)$  bzgl.  $f$  und  $t$ :

$$\begin{aligned} A_{xx}(\tau, \vartheta) &= \int_{-\infty}^{\infty} [A_1^2 \exp(j2\pi f_1 \tau) + A_2^2 \exp(j2\pi f_2 \tau) + 2A_1 A_2 \cos(2\pi \Delta f t) \exp(j2\pi f_\mu \tau)] \exp(j2\pi \vartheta t) dt \\ &= [A_1^2 \exp(j2\pi f_1 \tau) + A_2^2 \exp(j2\pi f_2 \tau)] \delta(\vartheta) + 2A_1 A_2 \exp(j2\pi f_\mu \tau) \cdot (\delta(\vartheta + \Delta f) + \delta(\vartheta - \Delta f)) \end{aligned}$$



- Nutzsignal entspricht der AKF und ist im Frequenzursprung konzentriert, Kreuzterme um  $\pm \Delta f$ , daher Tiefpass zu deren Unterdrückung zulässig

#### Beispiel: Summe zweier frequenzmodulierter Gauß-Impulse

■ Es sei:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

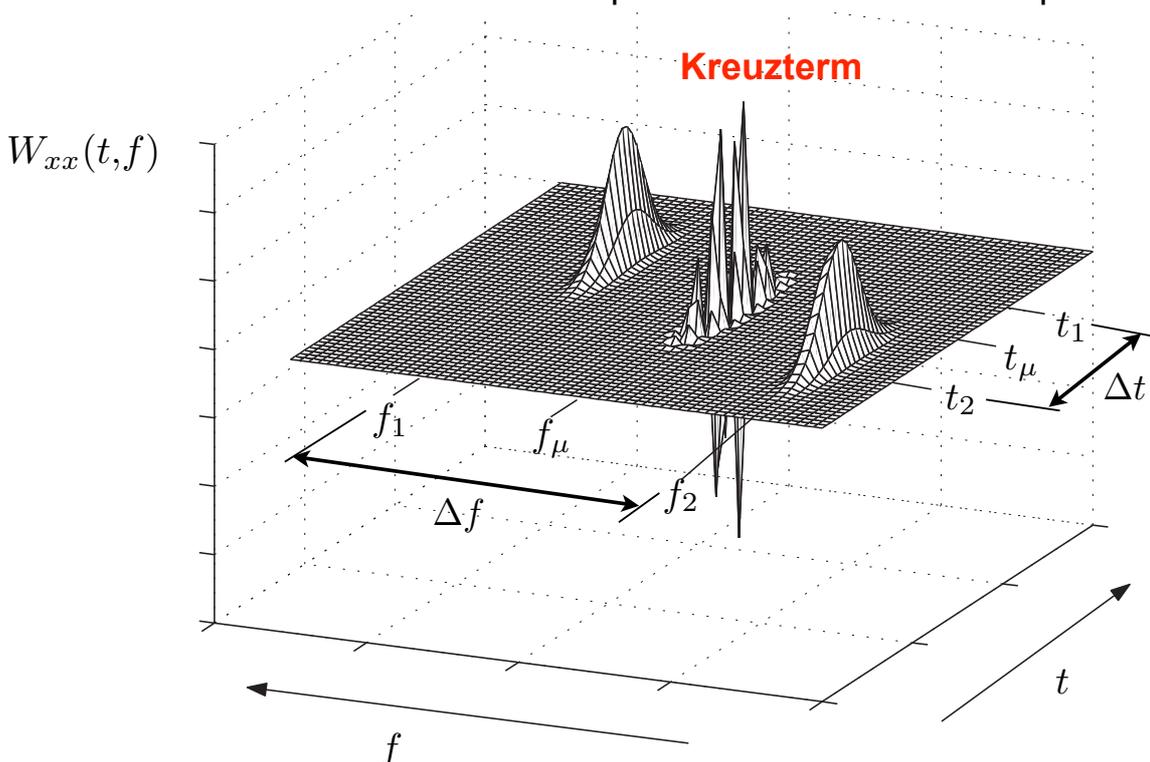
$$\text{mit } x_i(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t - t_i)^2 + j2\pi f_i t\right), \quad i = 1, 2$$

■ Für die **Autoterme** der WVV ergeben sich 2 konstante zweidimensionale Gauß-Impulse bei  $t_1, f_1$  und  $t_2, f_2$ . Der **Kreuzterm** liegt bei  $t_\mu = (t_1+t_2)/2$ ,  $f_\mu = (f_1+f_2)/2$  und oszilliert in Zeit- und in Frequenzrichtung:

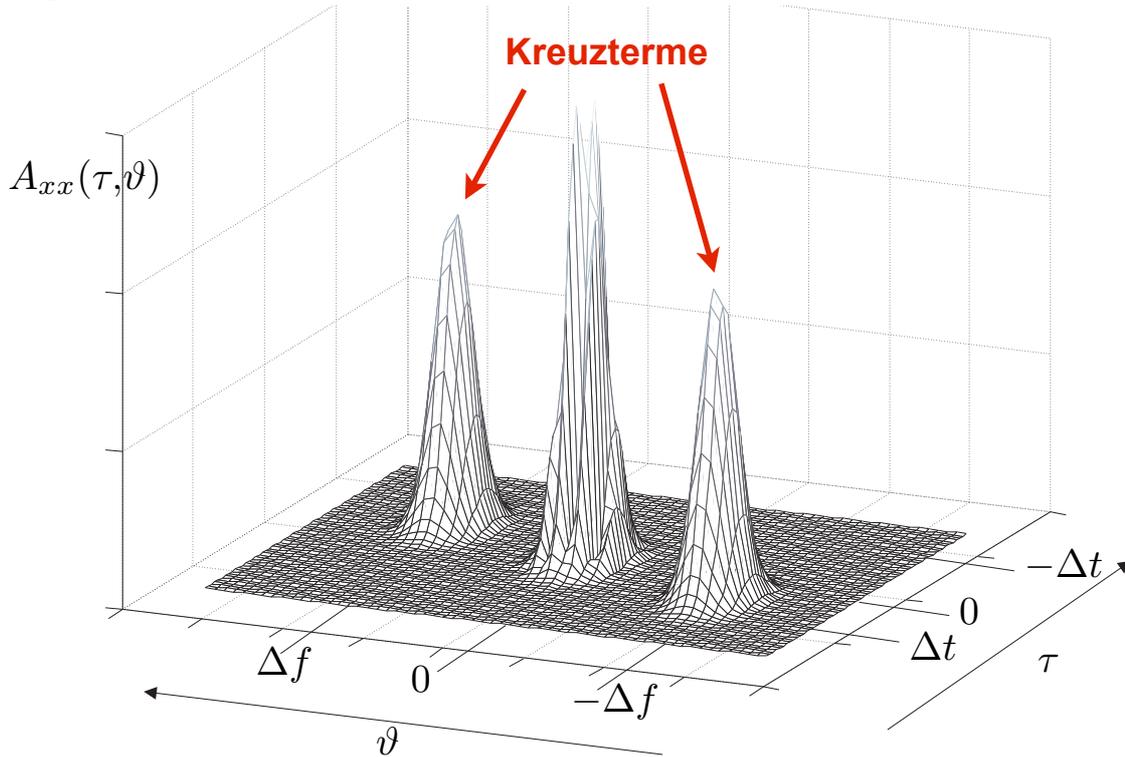
$$\begin{aligned} W_{xx}(t, f) = & 2 \cdot \exp\left(-\alpha(t - t_1)^2 - \frac{4\pi^2}{\alpha}(f - f_1)^2\right) \\ & + 2 \cdot \exp\left(-\alpha(t - t_2)^2 - \frac{4\pi^2}{\alpha}(f - f_2)^2\right) \\ & + 4 \cdot \exp\left(-\alpha(t - t_\mu)^2 - \frac{4\pi^2}{\alpha}(f - f_\mu)^2\right) \\ & \cdot \cos(2\pi((f - f_\mu)\Delta t + \Delta f(t - t_\mu) + \Delta f \cdot t_\mu)) \end{aligned}$$

### 5.3.1 Wigner-Ville-Verteilung einer Summe v. Signalen

#### WVV der Summe zweier frequenzmodulierter Gauß-Impulse



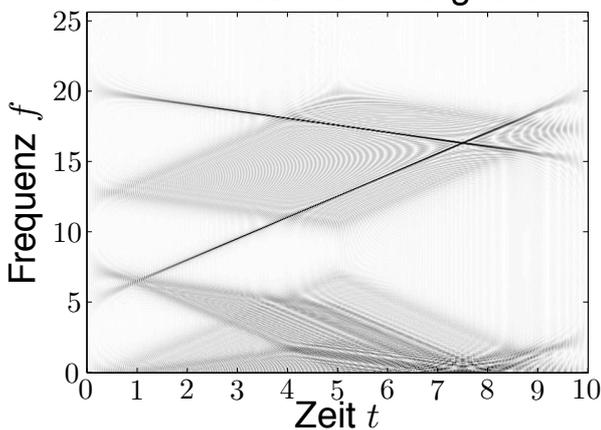
Ambiguitätsfunktion der Summe zweier frequenzmodulierter Gauß-Impulse



- Analytisches Signal:  $z(t) := x(t) + j \cdot \mathcal{H}\{x(t)\}$
- Eigenschaft: keine Spektralanteile bei negativen Frequenzen
- Kreuzterme zwischen den Spektralanteilen des reellen Signals bei positiven und negativen Frequenzen entfallen damit

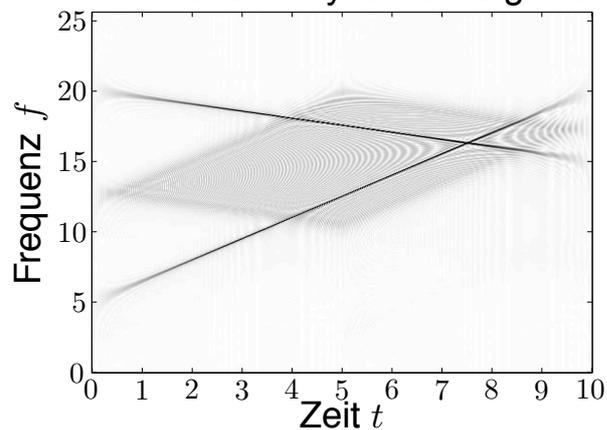
#### Beispiel: Wigner-Ville-Verteilung zweier überlagerter Chirp-Signale

WVW des reellen Signals



⊕⊕ Auflösung; ⊖⊖ Kreuzterme

WVW des analytischen Signals



⊕⊕ Auflösung; ⊖ Kreuzterme

- **Idee:** Einsatz einer kompakten 2D-Fensterfunktion  $\Phi(\tau, \vartheta)$  zur Dämpfung der Kreuzterme der Ambiguitätsfunktion außerhalb des Ursprungs

#### Cohen-Klasse

- Durch 2D-Fourier-Transformation der gefensternten Ambiguitätsfunktion erhält man die **Cohen-Klasse**:

$$C_{xx}(t, f) = \mathcal{F}_\tau \{ \mathcal{F}_\vartheta \{ A_{xx}(\tau, \vartheta) \cdot \Phi(\tau, \vartheta) \} \} = W_{xx}(t, f) \underset{t', f'}{*} \Pi(t, f)$$

mit  $\Pi(t, f) = \mathcal{F}_\tau \{ \mathcal{F}_\vartheta \{ \Phi(\tau, \vartheta) \} \}$  (Glättungsfunktion)

- Aufgrund der Faltung entsteht ein „Leckeffekt“, der die Auflösung der Cohen-Klasse gegenüber der WVV verschlechtert
- Abhängig von der gewählten Fensterfunktion („Kernfunktion“) ergeben sich verschiedene **Sonderfälle** der Cohen-Klasse:
  - Spektrogramm ( $\leftarrow$  STFT)
  - Choi-Williams-Verteilung
  - (Geglättete) Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung
  - Wigner-Ville-Verteilung

#### Spektrogramm

- Als Kernfunktion wird die Ambiguitätsfunktion eines Fensters  $\gamma^\#(t)$  gewählt:

$$\gamma^\#(t) := \gamma^*(-t)$$

$$\Phi(\tau, \vartheta) = A_{\gamma^\# \gamma^\#}(\tau, \vartheta) \quad \rightarrow \quad \Pi(t, f) = W_{\gamma^\# \gamma^\#}(t, f) = W_{\gamma \gamma}(-t, -f)$$

- Dann entspricht die Cohen-Klasse dem Spektrogramm (vgl. Folie 24):

$$S_x^\gamma(t, f) = |F_x^\gamma(t, f)|^2 = \langle W_{xx}(t', f'), W_{\gamma \gamma}(t' - t, f' - f) \rangle_{t', f'}$$

$$C_{xx}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t', f') W_{\gamma \gamma}(t' - t, f' - f) dt' df' = S_x^\gamma(t, f)$$

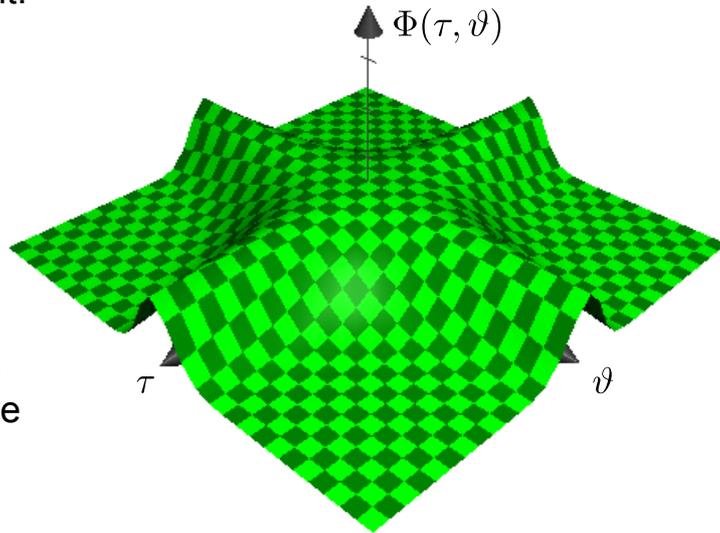
- In diesem Fall ist die Cohen-Klasse **nichtnegativ**
- Ambiguitätsfunktion eines kompakten Fensters ist ebenfalls kompakt und hat deshalb die Form der Übertragungsfunktion eines 2D-Tiefpasses

#### Choi-Williams-Verteilung (1989)

- Als Kernfunktion wird ein „kreuzförmiger Gauß-Impuls“ über der Zeit- bzw. Frequenzverschiebung gewählt:

$$\Phi(\tau, \vartheta) = \exp(-\alpha \vartheta^2 \tau^2)$$

- Je größer der Faktor  $\alpha$ , desto schmaler ist die Kernfunktion und umso stärker werden die Kreuzterme unterdrückt
- Aus der folgenden Darstellung der Cohen-Klasse lässt sich die Choi-Williams-Verteilung ableiten [KSW08]:



$$C_{xx}(t, f) = \mathcal{F}_\tau \left\{ x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) *_{t'} \mathcal{F}_\vartheta \{ \Phi(\tau, \vartheta) \} \right\} = CW_{xx}(t, f)$$

#### Geglättete Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung

- In diesem Fall wird als Kern- bzw. Glättungsfunktion eine **separierbare** Funktion gewählt:

$$\Phi(\tau, \vartheta) = G(-\vartheta) \cdot h(\tau) \quad \overset{\mathcal{F}_\vartheta \mathcal{F}_\tau}{\circ \text{---} \bullet} \quad \Pi(t, f) = g(t) \cdot H(f)$$

Dann entspricht die Cohen-Klasse der geglätteten Pseudo-WVV:

$$\begin{aligned} C_{xx}(t, f) &= \mathcal{F}_\tau \left\{ x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot h(\tau) *_{t'} g(t) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t') \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau dt' \\ &= W_{xx}^{(SPW)}(t, f) \end{aligned}$$

#### Sonderfall: Wigner-Ville-Verteilung

$$\Phi(\tau, \vartheta) = 1 \quad \overset{\mathcal{F}_\vartheta \mathcal{F}_\tau}{\circ \text{---} \bullet} \quad \Pi(t, f) = \delta(t) \cdot \delta(f)$$

### 5.3.3 Cohen-Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfkt.)

- Warum werden durch Fensterung der Ambiguitätsfunktion Kreuzterme unterdrückt?
- Annahme: Wahl von Rechteckfunktionen als Fensterfunktionen (SPW):

$$h(\tau) = r_{T_{\text{eff}}}(\tau), \quad G(-\vartheta) = r_{F_{\text{eff}}}(\vartheta)$$

→ Beschränkung der Intervallgrenzen in der Cohen-Klasse:

$$\begin{aligned} C_{xx}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t') \int_{\tau = -T_{\text{eff}}/2}^{T_{\text{eff}}/2} x\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f - f') \int_{\vartheta = -F_{\text{eff}}/2}^{F_{\text{eff}}/2} X\left(f' - \frac{\vartheta}{2}\right) X^*\left(f' + \frac{\vartheta}{2}\right) \exp(-j2\pi\vartheta t) d\vartheta df' \end{aligned}$$

- Bei der Berechnung der zeitlichen bzw. spektralen temporären AKF werden die Signale maximal um  $T_{\text{eff}}$  bzw.  $F_{\text{eff}}$  gegeneinander verschoben  
→ Signalanteile, die weiter auseinander liegen, beeinflussen sich nicht  
→ Gleichzeitig werden  $H(f)$  und  $g(t)$  breiter  $\Rightarrow$  Leckeffekt verstärkt

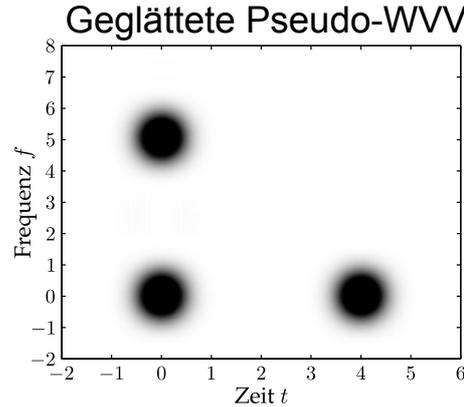
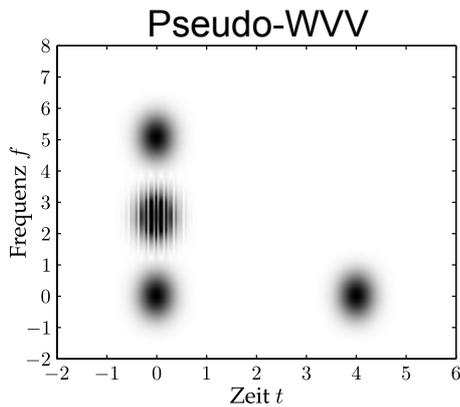
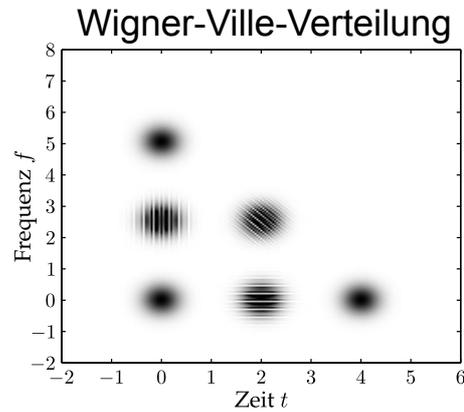
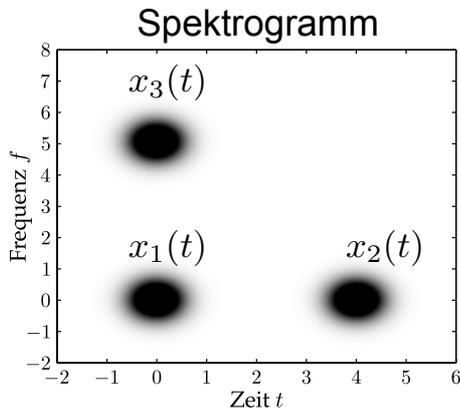
### 5.3.3 Cohen-Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfkt.)

#### Beispiel: Unterdrückung von Kreuztermen

- Signal, das aus drei Gauß-Impulsen besteht:

$$x(t) = \underbrace{\exp(-\alpha t^2)}_{x_1(t)} + \underbrace{\exp(-\alpha(t - t_0)^2)}_{x_2(t)} + \underbrace{\exp(-\alpha t^2) \cdot \exp(j2\pi f_0 t)}_{x_3(t)}, \quad \alpha > 0$$

- Das **Spektrogramm** liefert zwar die unschärfste Darstellung, ist aber dafür frei von Kreuztermen.
- Bei der **WV** entstehen oszillierende Kreuzterme zwischen allen drei Signalanteilen.
- Bei der **Pseudo-WV** wird ein Fenster  $h(\tau)$  mit  $T_{\text{eff}} < t_0$  verwendet. Dadurch wird bei der Berechnung der zeitlichen temporären AKF das Signal  $x_2(t)$  nicht mehr mit  $x_1(t)$  und  $x_3(t)$  verglichen. Die Kreuzterme zwischen diesen Signalanteilen werden dadurch eliminiert.
- Bei der **geglätteten Pseudo-WV** werden durch das zusätzliche Fenster auch die Kreuzterme zwischen den frequenzverschobenen Signalanteilen unterdrückt. Aufgrund des Leckeffekts verschlechtert sich allerdings die Auflösung.



- Bei Vertretern der Cohen-Klasse mit Glättung in Zeit- und Frequenzrichtung (Spektrogramm, SPW) werden Kreuzterme in beide Richtungen unterdrückt, aber es tritt ebenfalls eine Unschärfe in beiden Richtungen auf
- Im Folgenden wird die Verwandtschaft zwischen diesen Vertretern der Cohen-Klasse näher untersucht

#### Beziehung zwischen geglätteter Pseudo-WWV und Spektrogramm

- Geglättete Pseudo-WWV besitzt eine separierbare Glättungsfunktion:

$$\Pi(t, f) = g(t) \cdot H(f)$$

- Entspricht die Glättungsfunktion gleichzeitig einer WWV (des Fensters  $\gamma$ ),

$$\Pi(t, f) = W_{\gamma\gamma}(-t, -f) \Leftrightarrow \Pi(-t, -f) = W_{\gamma\gamma}(t, f),$$

dann ist die geglättete Pseudo-WWV gleichzeitig ein Spektrogramm

- Zur Überprüfung soll die Glättungsfunktion „rücktransformiert“ werden

- Dafür wird die Glättungsfunktion

$$W_{\gamma\gamma}(t, f) = \Pi(-t, -f) = g(-t) \cdot H(-f)$$

in die Rekonstruktionsgleichung der WVV (Folie 28) eingesetzt:

$$\hat{\gamma}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot H(-f) \exp(j2\pi ft) \, df}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g(0) \cdot H(-f) \, df}}, \quad f' = -f$$

$$= \frac{g\left(-\frac{t}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} H(f') \exp(j2\pi f'(-t)) \, df'}{\sqrt{g(0) \int_{-\infty}^{\infty} H(f') \, df'}}$$

$$\hat{\gamma}(t) = \frac{g\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot h(-t)}{\sqrt{g(0) \cdot h(0)}}$$

$$\hat{\gamma}(t) = \frac{g\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot h(-t)}{\sqrt{g(0) \cdot h(0)}}$$

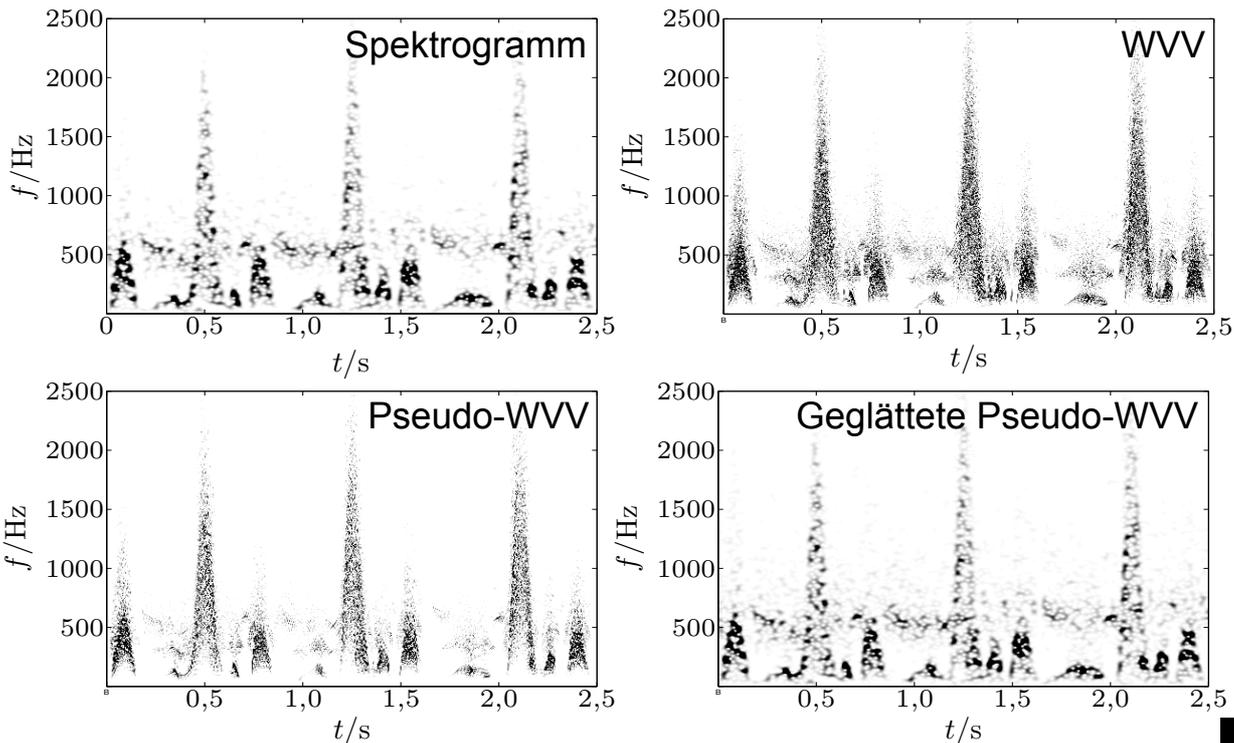
- Eine Geglättete Pseudo-WVV ist also gleichzeitig ein Spektrogramm, wenn eine Fourier-Rücktransformierte zu  $H(f)$  existiert und der Nenner oben endlich bleibt:

$$g(0) \cdot h(0) = g(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \, df < \infty \quad (190)$$

#### Folgerung:

- Geglättete Pseudo-WVV kann als Untermenge des Spektrogramms interpretiert werden, da für  $g(t)$  und  $H(f)$  kompakte Funktionen gewählt werden und die Forderungen somit stets erfüllt sind
- Für die Pseudo-WVV und die Wigner-Ville-Verteilung selbst gilt dies nicht, da in beiden Fällen  $g(t) = \delta(t)$  gilt und daher (190) nicht erfüllt ist
- Weiterhin kann gezeigt werden, dass die Choi-Williams-Verteilung kein Spektrogramm ist, da sich die Kernfunktion dieser Verteilung nicht als Ambiguitätsfunktion eines Fensters  $\gamma(t)$  interpretieren lässt

#### Beispiel: Ultraschall-Doppler-Messtechnik



#### Beispiel: Cohen-Klasse bei periodischen Signalen

- Nun soll untersucht werden, welche Gestalt ein **periodisches** Signal der Periodendauer  $T_0 = 1/f_0$  bei verschiedenen Zeit-Frequenz-Darstellungen annimmt
- Durch Entwicklung in eine Fourier-Reihe lassen sich die Kreuz- und die Autoterme und daraus die WVV  $W_{yy}(t, f)$  explizit berechnen [KSW08]
- Daraus kann mit Moyals Formel das **Spektrogramm** berechnet werden [Fol. 24]; als Analysefenster wird der **Gauß-Impuls** verwendet:

$$\gamma(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right) \quad \circ \bullet \quad W_{\gamma\gamma}(t, f) = 2e^{-\beta t^2} \exp\left(-4\frac{\pi^2 f^2}{\beta}\right)$$

- Die Glättung von  $W_{yy}(t, f)$  mit der WVV des Analysefensters ergibt das Spektrogramm
- Da  $W_{\gamma\gamma}(t, f)$  separierbar ist, ist ein mittels eines Gauß-Impulses berechnetes Spektrogramm gleichzeitig eine **geglättete Pseudo-WVV**

### 5.3.3 Cohen-Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfkt.)

- Analog lässt sich mit Moyals Formel auch das **Skalogramm** berechnen
- Als Analyse-Wavelet soll das **Gabor-Wavelet** verwendet werden:

$$\psi(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right) \cdot e^{j2\pi f_{\psi}t}$$

- Da dieses einem frequenzverschobenen Gauß-Impuls entspricht, kann seine WVV dank der Verschiebungsinvarianz ( $f \mapsto f - f_{\psi}$ ) direkt angegeben werden:

$$\psi(t) = \gamma(t) e^{j2\pi f_{\psi}t} \quad \circ \rightarrow \bullet \quad W_{\gamma\gamma}(t, f - f_{\psi}) = 2e^{-\beta t^2} \exp\left(-4\frac{\pi^2(f - f_{\psi})^2}{\beta}\right)$$

- Auch diese Glättungsfunktion ist separierbar, weshalb ein Skalogramm, das mit Hilfe des Gabor-Wavelets berechnet wird, gleichzeitig eine sog. **affine geglättete Pseudo-WVV** (vgl. Abschnitt 5.3.4) ist

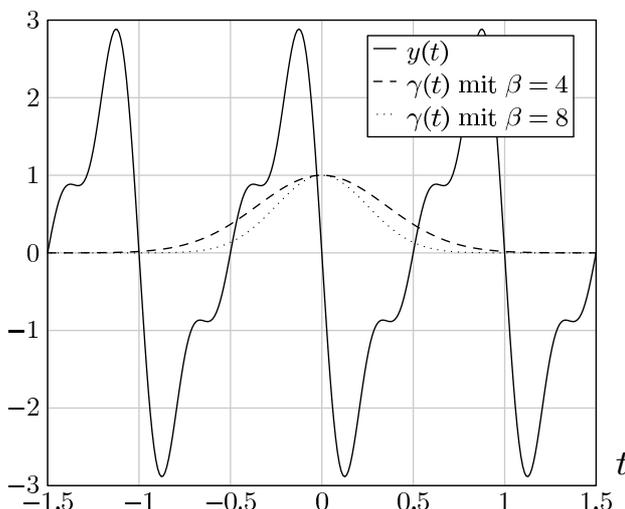
### 5.3.3 Cohen-Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfkt.)

- Nun werden ein Signal  $y(t)$  und dessen Fourier-Koeffizienten herangezogen, um Spektrogramm (2 Parametrierungen) und Skalogramm miteinander zu vergleichen:

$$y(t) = 2 \cdot [\sin(-2\pi t) + \sin(-2\pi 2t)/2 + \sin(-2\pi 3t)/3]$$

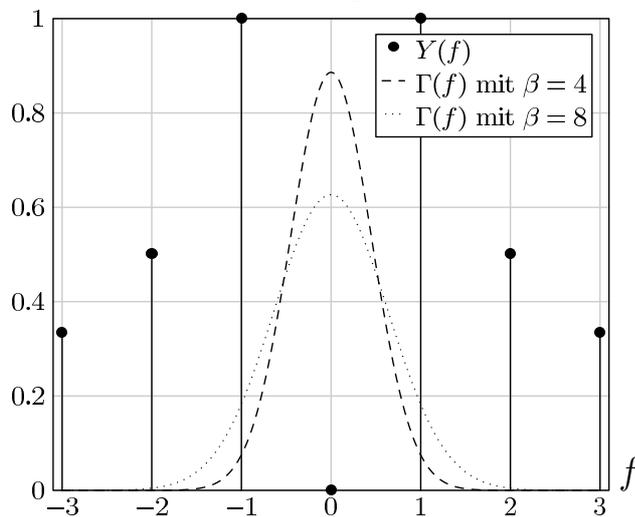
**Zeitbereich:**

Signal  $y(t)$  und Gauß-Impulse



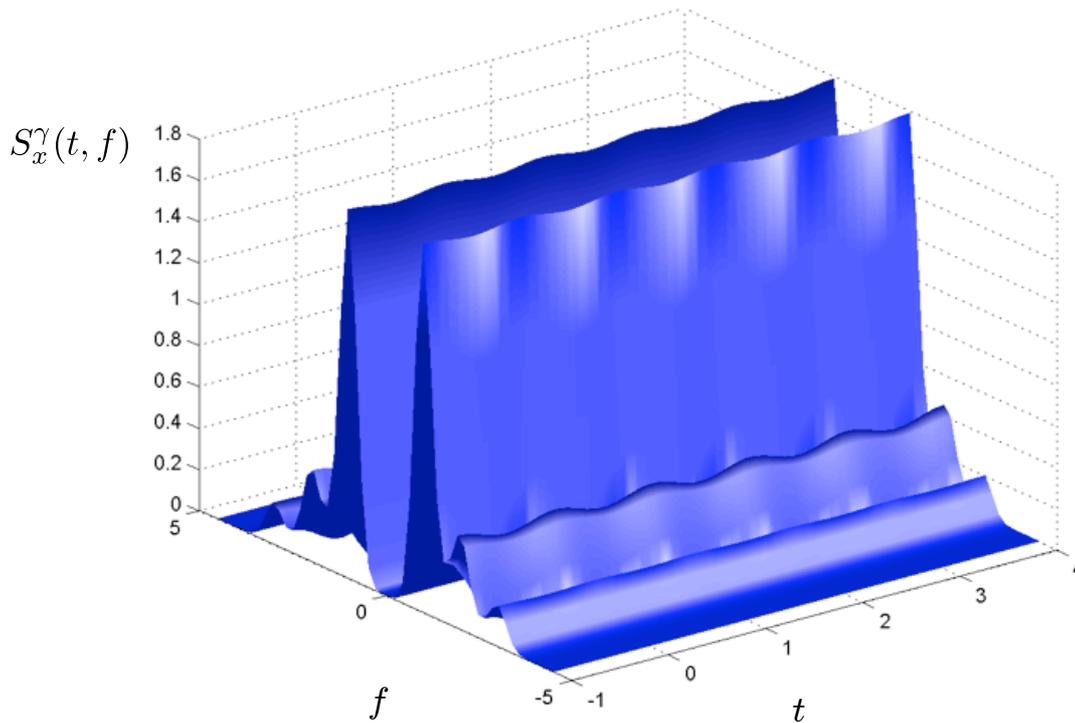
**Frequenzbereich:**

Koeffizientenbeträge und Spektren



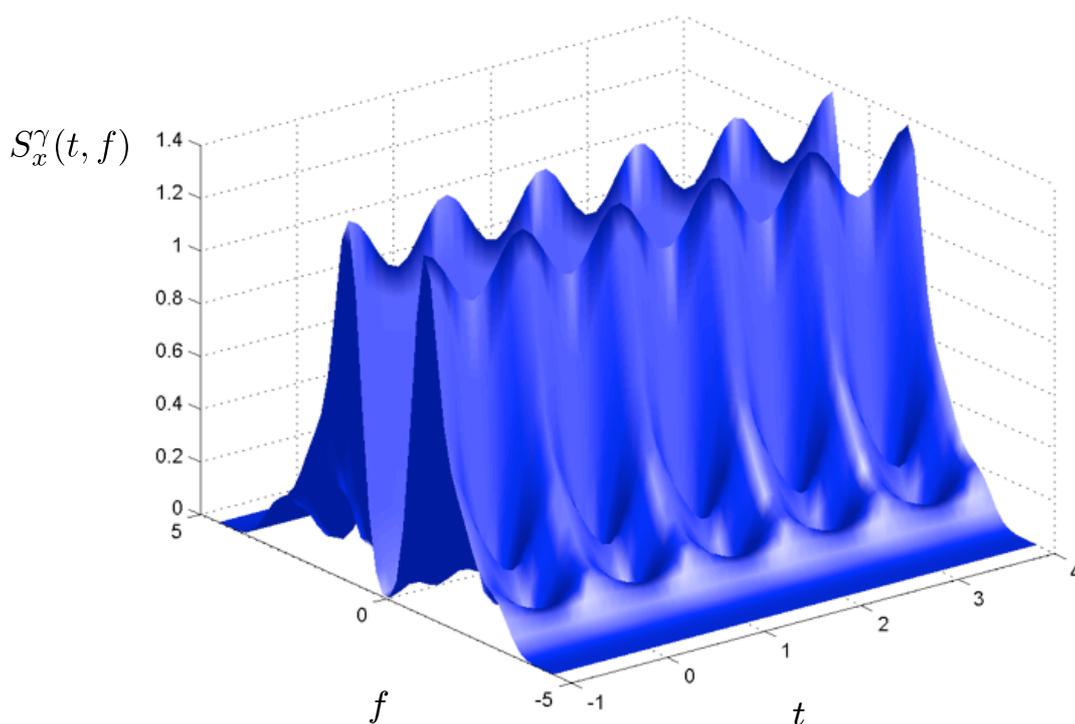
### 5.3.3 Cohen-Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfkt.)

Spektrogramm für  $\beta = 4$

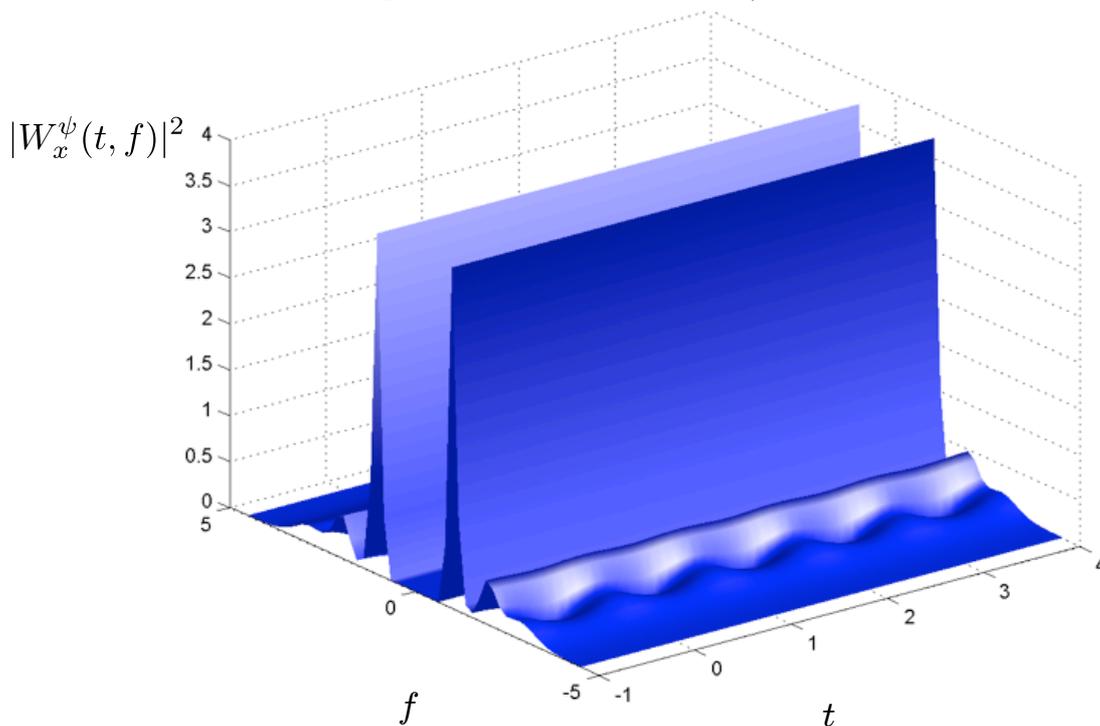


### 5.3.3 Cohen-Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfkt.)

Spektrogramm für  $\beta = 8$

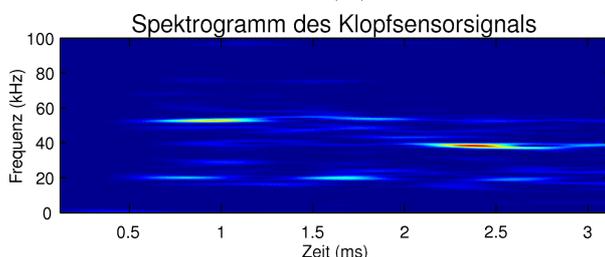
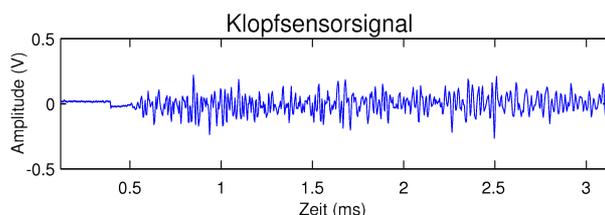
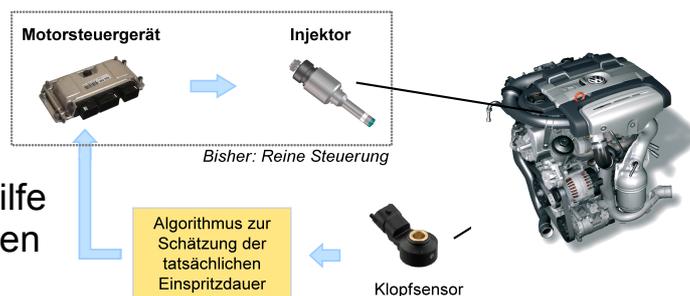


Skalogramm für  $\beta = 8$  und  $f_\psi = 3$  bei  $a = 1$



#### Beispiel: Analyse von Einspritzvorgängen bei der Benzin-Direkteinspritzung

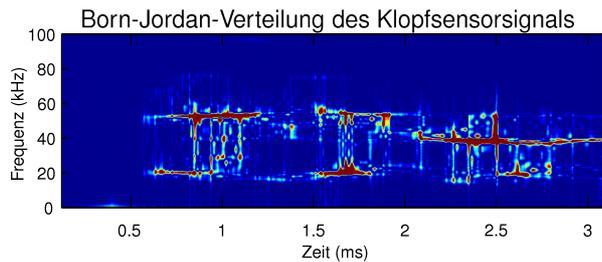
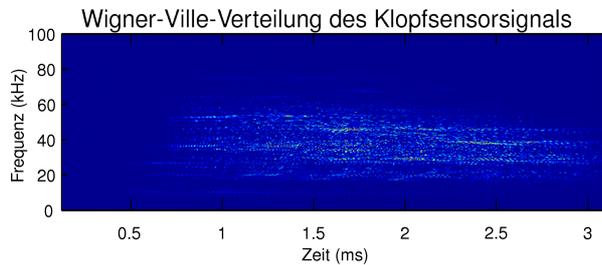
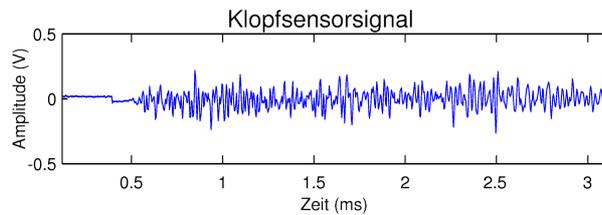
- **Ziel:** Schätzung der Einspritzdauer durch Auswertung des Klopfensorsignals
- Zunächst: Signalanalyse mit Hilfe von Zeit-Frequenz-Darstellungen



- Zeit-Frequenz-Darstellungen mit hoher Auflösung gefordert
  - Wann treten Ereignisse auf?
  - Welche Frequenzen sind beteiligt?
- Lineare Zeit-Frequenz-Darstellungen haben eine unzureichende Auflösung

### 5.3.3 Cohen-Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfkt.)

- Analyse des Klopfensorsignals mittels quadratischer Zeit-Frequenz-Darstellungen
- Wigner-Ville-Verteilung:
  - sehr hohe Auflösung (Vermeidung des Leckeffekts)
  - starke Interferenzen (Autoterme werden überdeckt)
  - keine Interpretation möglich
  - ➔ Kreuzterme unterdrücken
  - ➔ hohe Auflösung erhalten
- Born-Jordan-Verteilung (Vertreter der Cohen-Klasse mit sinc-förmiger Kernfunktion):
  - hohe Schärfe in Zeit- und Frequenzrichtung
  - Unterdrückung v. Interferenzen



### 5.3.4 Affine Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfkt.)

- In Analogie zur Definition der Cohen-Klasse

$$C_{xx}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t - t', f - f') W_{xx}(t', f') dt' df'$$

wird die **affine Klasse** definiert, indem man die Koordinaten der Glättungsfunktion affin transformiert:

**Affine Klasse:**

$$\Omega_{xx}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - b}{a}, af\right) \cdot W_{xx}(t, f) dt df$$

#### Eigenschaften

- Konflikt zwischen Unterdrückung der Kreuzterme und Verschlechterung der Auflösung gilt für die affine Klasse ebenso wie für die Cohen-Klasse
- Zu den Vertretern der affinen Klasse gehören das Skalogramm, die WVV und die affine geglättete Pseudo-WVV

#### Skalogramm

- Wird als Glättungsfunktion die WVV des Wavelets  $\psi(t)$  eingesetzt,

$$\Pi(t, f) = W_{\psi\psi}(t, f),$$

ist die affine Klasse nach Moyals Formel identisch mit dem Skalogramm:

$$\Omega_{xx}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, af\right) \cdot W_{xx}(t, f) dt df = |W_x^\psi(a, b)|^2$$

#### Wigner-Ville-Verteilung

- Die WVV resultiert aus der affinen Klasse mit der Glättungsfunktion:

$$\Pi(t, f) = \delta(t) \cdot \delta(f - f_0)$$

„Bandpasssignal“

- Die affine Klasse lautet dann:

$$\Omega_{xx}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-b}{a}\right) \delta(af - f_0) \cdot W_{xx}(t, f) dt df = W_{xx}\left(b, \frac{f_0}{a}\right)$$

#### Affine geglättete Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung (ASPW)

- Analog zur geglätteten Pseudo-WVV lässt sich eine affine geglättete Pseudo-WVV definieren. Dazu wird eine separierbare Glättungsfunktion angesetzt:

$$\Pi(t, f) = g(t) \cdot H(f)$$

- Die Definitionsgleichung lautet damit:

$$\Omega_{xx}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{t-b}{a}\right) H(af) \cdot W_{xx}(t, f) dt df = W_{xx}^{(\text{ASPW})}(a, b)$$

### 5.3.5 Reassignment-Methode

- **Ziel:** Umformung von Zeit-Frequenz-Verteilungen, damit gleichzeitig Kreuzterme unterdrückt werden und eine große Schärfe der Darstellung erzielt wird
- Interpretation der Cohen-Klasse (alternativ: der affinen Klasse)

$$C_{xx}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t - t', f - f') W_{xx}(t', f') dt' df'$$

als gewichtete Summation (Faltung) der Werte der Wigner-Ville-Verteilung in einer Umgebung um einen Punkt  $(t, f)$ , wobei die Glättungsfunktion als Gewichtungsfunktion dient

- Der gewichtete Summationswert wird dann dem Punkt  $(t, f)$  zugewiesen

- Bei der **Reassignment-Methode** wird der Summationswert nicht dem Punkt  $(t, f)$  zugewiesen, sondern dem Massenschwerpunkt des Produktes  $W_{xx}(t', f') \Pi(t - t', f - f')$
- Dadurch werden Peaks in der Zeit-Frequenz-Verteilung verstärkt
- Entspricht einer nichtlinearen Heuristik zur Entfaltung (*deconvolution*)

### 5.3.6 Signalabhängige Filterung der WV

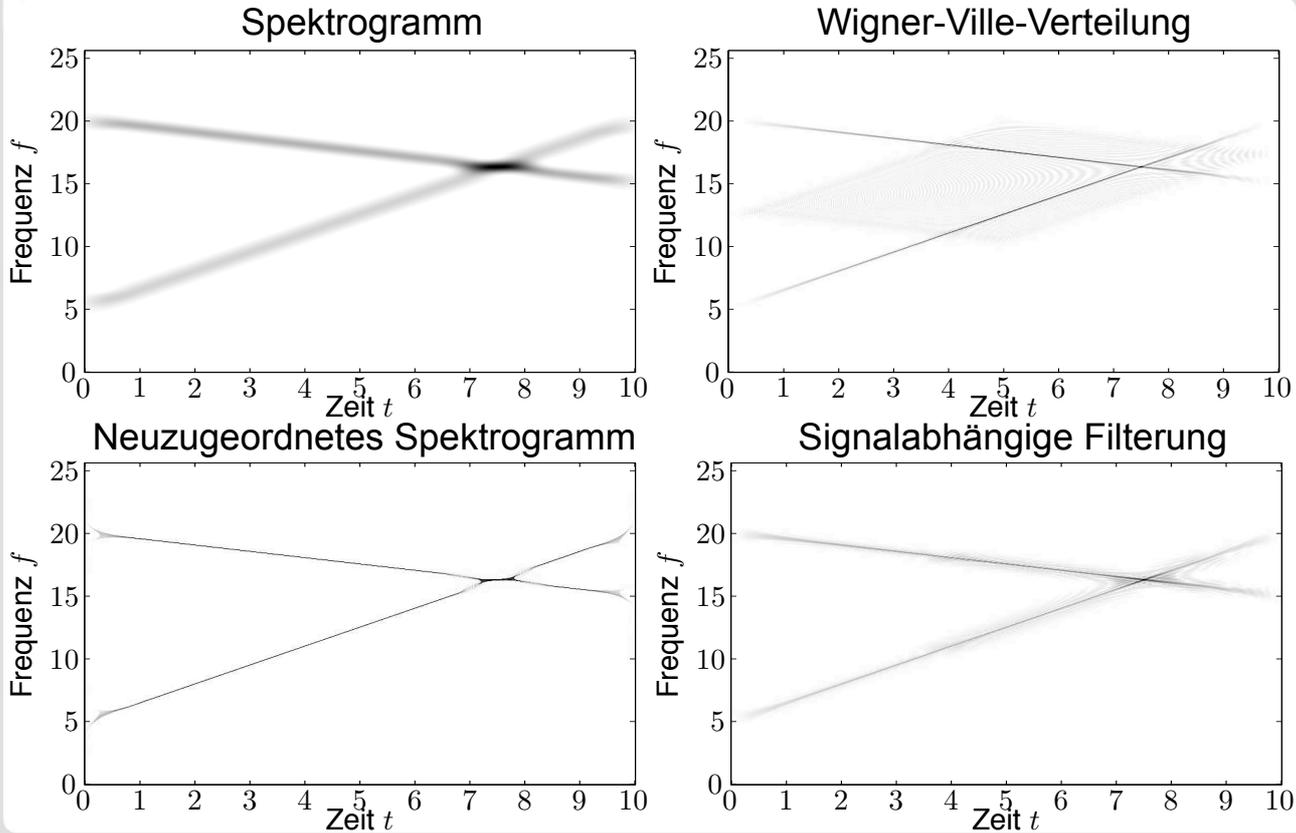
- Fensterung der Ambiguitätsfunktion verursacht einen Leckeffekt bei der WV, so dass der Vorteil der WV (hohe Auflösung) verlorengeht
- Weiteres Problem: Wahl einer geeigneten Fensterfunktion

- Lösung: **signalabhängige** (d. h. individuelle) **Filterung** der WV
- Spektrogramm  $S_x^\gamma(t, f)$  als Filterfunktion geeignet, da gleiche Struktur wie WV, allerdings ohne Kreuzterme

#### Gefilterte Wigner-Ville-Verteilung:

$$\begin{aligned} W_{xx}^F(t, f) &= (W_{xx}(t, f) \cdot S_x^\gamma(t, f))^{1/2} \\ &= \left( W_{xx}(t, f) \cdot \left( W_{xx}(t, f) \underset{t', f'}{*} W_{\gamma\gamma}(t, f) \right) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

- Kein Leckeffekt durch die Multiplikation, hohe Auflösung bleibt erhalten
- Kreuzterme werden unterdrückt
- Aber: Autoterme gedämpft → Zeit-/Frequenz-Randbedingungen verletzt



## 5.4 Diskrete Wigner-Ville-Verteilung

## 5.4 Diskrete Wigner-Ville-Verteilung

- Zur Herleitung der diskreten WVV wird in der Definitionsgleichung der WVV  $\tau$  durch  $\tau' = \tau/2$  ersetzt:

$$\begin{aligned} W_{xx}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau') x^*(t - \tau') \exp(-j4\pi f\tau') d(2\tau') \end{aligned}$$

- Nun wird die temporäre AKF bzgl.  $\tau'$  mit der Abtastzeit  $t_A$  abgetastet:

$$\begin{aligned} W_{xx}(t, f) &= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t + \tau') x^*(t - \tau') \delta(\tau' - mt_A) \exp(-j4\pi f\tau') d\tau' \\ &= 2 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t + mt_A) x^*(t - mt_A) \exp(-j4\pi f mt_A) \end{aligned}$$

## 5.4 Diskrete Wigner-Ville-Verteilung

$$W_{xx}(t, f) = 2 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t + mt_A) x^*(t - mt_A) \exp(-j4\pi f mt_A)$$

- Schließlich werden die Zeit  $t$  und die Frequenz  $f$  bei einer Signallänge von  $N$  diskretisiert:

$$t = nt_A \quad f = \frac{kf_A}{N}$$

- Damit lautet die **diskrete Wigner-Ville-Verteilung**:

$$W_{xx}(n, k) = 2 \cdot \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} x(n + m) x^*(n - m) \exp(-j4\pi km/N)$$

- Man kann zeigen, dass die Verteilung  $f_A/2$ -periodisch ist [KSW08]:

$$W_{xx}(n, k + i \cdot N/2) = W_{xx}(n, k)$$

- Vermeidung von Aliasing:  $f_g < f_A/4$

- Bei analytischen Signalen:  $f_g < f_A/2$